Целая и дробная части числа

А.ЕГОРОВ

Упомянутые в заглавии функции довольно часто встречаются в самых разных областях математики – в частности, в алгебре, анализе, теории чисел, комбинаторике. Об этих и родственных им функциях, а также о задачах, с их помощью решаемых, мы и поговорим.

Целая часть числа и ее родственники

Целой частью $[x]$ *числа* x *называется наибольшее целое число, не превосходящее* x.

Например, $[-1{,}5]=-2$, $[-1]=-1$, $[0]=0$, $[1{,}5]=1$, $[\pi]=3$. Вообще, в силу определения, равенство $[x]=k$ означает, что k – это целое число, такое, что $k \le x < k+1$.

График функции $y=[x]$ (рис.1) состоит из ступенек и как бы образует лестницу, идущую слева направо и снизу вверх, переходящую в себя при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}=(1;1)$.

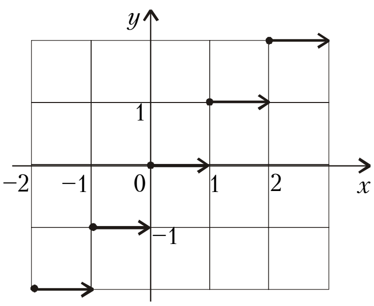

Рис. 1

В литературе также встречается термин «пол числа x» (в противоположность слову «потолок») и его обозначение $\lfloor x \rfloor$. Это то же самое, что и целая часть числа.

Сходным образом определяется функция $\lceil x \rceil$ – потолок числа x. Это *наименьшее целое число, не меньшее* x.

Например, $\lceil -1 \rceil = -1$, $\left\lceil -\frac{1}{2} \right\rceil = 0$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 2{,}5 \rceil = 3$.

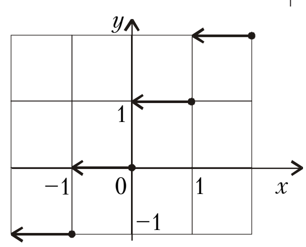

Рис. 2

График функции $y=\lceil x \rceil$ показан на рисунке 2.

Упражнения

1. Подумайте, как из графика $y=[x]$ получить график $y=\lceil x \rceil$, и выразите $\lceil x \rceil$ через целую часть.

2. Решите уравнения

а) $\left\lceil \frac{x^2-3x}{2} \right\rceil = 1$; б) $\left\lceil \frac{3x-1}{3} \right\rceil = 5$.

Отметим некоторые почти очевидные свойства целой части числа:

1) $[x] \le x$; 2) $[x+a]=[x]+a$, где a – произвольное целое число; 3) $[x+y] \ge [x]+[y]$ при любых x и y.

Упражнения

3. Докажите, что если $[x+a]=[x]+[a]$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$, то a – целое число.

4. Постройте графики функций

а) $y=[2x]$; б) $y=[-x]$; в) $y=[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]$.

5. Нарисуйте на плоскости xOy точки, для которых

а) $[x+y]=[x]+[y]$; б) $\left[x^2+y^2\right]=1$; в) $[x]=[y]$.

6. Докажите, что

$$[x]+[y]+[x+y] \le [2x]+[2y].$$

Наконец, иногда бывает полезна функция $y=(x)$ – ближайшее к x целое число. При этом если ближайших к x целых чисел два (что бывает при $x=\frac{2k+1}{2}$, где k – целое), выбирается большее из них.

Например, $\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, $\left(\frac{1}{2}\right)=1$, $(\pi)=3$, $(0{,}8)=1$.

Нетрудно видеть, что $(x)=\left[x+\frac{1}{2}\right]$.

Упражнение 7. Докажите это и постройте график функции $y=(x)$.

Дробная часть числа

Дробной частью $\{x\}$ *числа* x *называется число* $\{x\}=x-[x]$.

Так, $\{-0{,}3\}=0{,}7$, $\left\{-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$, $\{\sqrt{2}\}=\sqrt{2}-1$, $\{-2\sqrt{2}\}=3-2\sqrt{2}$ — $= 2-\sqrt{2}$, $\{1\}=0$.

Отметим некоторые свойства дробной части:

1) равенство $\{x\}=x$ равносильно тому, что $0 \le x < 1$; 2) $\{x\}=\{y\}$ тогда и только тогда, когда $x-y=n$, где n – целое число; в частности, 3) $\{x+1\}=\{x\}$ для любого x.

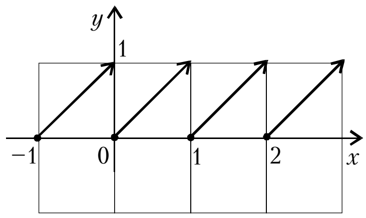

Рис. 3

Таким образом, функция $y=\{x\}$ периодична с периодом 1. График ее показан на рисунке 3 (покосившийся периодический забор).

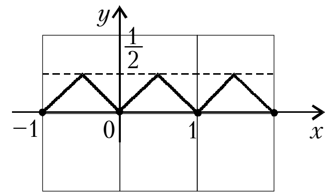

Рис. 4

С дробной частью тесно связана еще одна функция: $y=\{\{x\}\}$ – расстояние от x до ближайшего целого числа. В отличие от дробной части последняя функция непрерывна. Ее график изображен на рисунке 4.

Упражнения

8. Докажите, что $\{\{x\}\}=\left|\left\{x+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right|$.

9. Докажите, что $\{k\{x\}\}=\{kx\}$ при любом натуральном k, и решите уравнение $\{3\{x\}\}=x$.

10. Решите уравнения

а) $\{3x\}=\frac{1}{2}$; б) $\{6x\}+\{x\}=1$.

11. Изобразите на плоскости xOy точки, для которых

а) $\{x\}=\{y\}$; б) $\{x\}+\{y\}<1$.

Несколько задач

Уравнения, неравенства и другие задачи про целые и дробные части числа довольно часто встречаются на математических олимпиадах разных уровней. Разберем несколько характерных примеров.

Задача 1 (II Соросовская олимпиада). *Решите уравнение*

$$x^2-10[x]+9=0\ .$$

Решение. Пусть $[x]=k$. Прежде всего, ясно, что $k\ge 0$. Поскольку $x\ge k$, получаем при $x\ge 0$ неравенство

$$x^2-10x+9\le 0\ .$$

Отсюда следует, что $1\le x\le 9$, но тогда и $1\le k\le 9$, причем x^2+9 – целое число, делящееся на 10. Проверка показывает, что годятся значения x = 1, $x=\sqrt{61}$, $x=\sqrt{71}$, x = 9.

Ответ. 1; $\sqrt{61}$; $\sqrt{71}$; 9.

Задача 2. *Решите уравнение*

$$\left[\frac{2x+1}{3}\right]=[x]\ .$$

Решение. Пусть $[x]=k$. Тогда

$$\begin{cases} k\le \dfrac{2x+1}{3}<k+1,\\ k\le x<k+1. \end{cases}$$

Запишем эквивалентную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{3k-1}{2}\le x<\dfrac{3k+2}{2},\\ k\le x<k+1, \end{cases} \qquad (*)$$

откуда следует, что k обязано удовлетворять неравенствам

$$\frac{3k-1}{2}<k+1\ ,\ \ k<\frac{3k+2}{2}\ ,$$

т.е. $-2<k<3$.

Итак, возможны следующие значения k: −1; 0; 1; 2. Подставляя последовательно эти значения в систему $(*)$ и решая полученные неравенства, находим ответ.

Ответ. $-1\le x<-\frac{1}{2}$; $0\le x<2$; $\frac{5}{2}\le x<3$.

Замечание. Можно было решить эту задачу и иначе. Построив графики левой и правой частей исходного уравнения, обнаружим, что они совпадают на промежутках, указанных в ответе.

Задача 3. *Решите уравнение*

$$\left[x^2\right]=2[x]\ .$$

Решение. Пусть $[x]=k$, $\{x\}=\alpha$. Тогда $k\ge 0$, $\alpha\ge 0$ и

$$\left[(k+\alpha)^2\right]=2[k+\alpha]\ ,$$

после чего приходим к уравнению

$$\left[2k\alpha+\alpha^2\right]=2k-k^2\ .$$

Поскольку левая часть уравнения неотрицательна, а k – целое число, то $2k-k^2\ge 0$, и возможны три значения k – это 0, 1 и 2.

При k = 0 получим $\left[\alpha^2\right]=0$, что выполняется при всех $0\le\alpha<1$. Отсюда $0\le x<1$.

При k = 1 приходим к уравнению

$$\left[2\alpha+\alpha^2\right]=1\ ,$$

что дает систему $1\le 2\alpha+\alpha^2<2$, $0\le\alpha<1$, откуда $\sqrt{2}-1\le\alpha<1$, т.е. $\sqrt{2}\le x<2$.

Наконец, при k = 2 имеем уравнение

$$\left[4\alpha+\alpha^2\right]=0\ ,$$

равносильное системе $0\le 4\alpha+\alpha^2<1$, $0\le\alpha<1$. Ее решение – промежуток $0\le\alpha<\sqrt{5}-2$, откуда $2\le x<\sqrt{5}$.

Объединяя полученные промежутки, запишем ответ.

Ответ. $0\le x<1$, $\sqrt{2}\le x<\sqrt{5}$.

Задача 4 (V Соросовская олимпиада). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=3,9,\\ y+[z]+\{x\}=3,5,\\ z+[x]+\{y\}=2. \end{cases}$$

Решение. Пусть $a=[x]$, $\alpha=\{x\}$, $b=[y]$, $\beta=\{y\}$, $c=[z]$, $\gamma=\{z\}$, где a, b, c – целые числа, $0\le\alpha<1$, $0\le\beta<1$, $0\le\gamma<1$. В этих обозначениях система имеет вид

$$\begin{cases} a+\alpha+b+\gamma=3{,}9,\\ b+\beta+c+\alpha=3{,}5,\\ c+\gamma+a+\beta=2. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получим

$$2(a+b+c+\alpha+\beta+\gamma)=9{,}4\ ,$$

т.е.

$$a+b+c+\alpha+\beta+\gamma=4{,}7\ .$$

Вычитая из полученного уравнения последовательно первое, второе и третье уравнения системы, имеем

$$\begin{cases} c+\beta=0{,}8,\\ a+\gamma=1{,}2,\\ b+\alpha=2{,}7, \end{cases}$$

откуда следует, что c = 0, $\beta=0{,}8$, a = 1, $\gamma=0{,}2$, b = 2, $\alpha=0{,}7$.

Ответ. x = 1,7; y = 2,8; z = 0,2.

Вот еще одна задача о поведении целых и дробных частей чисел вида ξ^n, где ξ – корень некоторого квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Задача 5. *Докажите, что а)* $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right]$ *– нечетное число; б)* $\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\}>0,\underbrace{9\ldots9}_{1001}$.

Решение. Раскрывая скобки в выражении $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}$, получим

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}=A+B\sqrt{3}\ ,$$

где A и B – натуральные числа, причем

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}=A-B\sqrt{3}=\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}}\ .$$

Но тогда

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}=2A\ .$$

Далее,

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}=2A-1+1-\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}\ .$$

Отсюда следует, что

$$\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right] = 2A - 1 - \text{нечетное число,}$$

а

$$\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\} = 1 - \left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}.$$

Оценим степень в правой части полученного равенства:

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002} = \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}} = \frac{1}{\left(7+2\sqrt{3}\right)^{1001}} < \frac{1}{10^{1001}}.$$

Поэтому $\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\} > 0,\underbrace{9\ldots9}_{1001}$.

В следующей задаче целая часть находит довольно неожиданное применение.

Задача 6. *Рассмотрим последовательность*

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ \ldots$$

(последовательно выписаны единица, две двойки, три тройки, четыре четверки, пять пятерок и т.д.). Какое число стоит на месте с номером а) 2002; б) n?

Решение. Пусть $x_n = k$ – член заданной последовательности с номером n. До первого появления числа k выписано $1 + 2 + 3 + \ldots + k - 1 = \frac{k(k-1)}{2}$ чисел. А последнее число k стоит на месте с номером $\frac{k(k+1)}{2}$. Поэтому

$$\frac{k(k-1)}{2} < n \le \frac{k(k+1)}{2},$$

откуда

$$k^2 - k < 2n \le k^2 + k.$$

Заметим, что к левой и правой частям последнего неравенства можно прибавить по $\frac{1}{4}$, так что

$$k^2 - k + \frac{1}{4} < 2n < k^2 + k + \frac{1}{4},$$

т.е.

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 < 2n < \left(k+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Тогда

$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{2n} < k + \frac{1}{2},$$

откуда

$$k < \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < k + 1.$$

Следовательно,

$$x_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right].$$

Мы получили формулу, позволяющую вычислить n-й член исходной последовательности. В частности, $x_{2002} = 63$.

Упражнения

12. Решите уравнение $[x]^2 = \left[x^2\right]$.

13. Найдите наименьшее положительное x, для которого $[x]\cdot\{x\} \ge 3$.

14. а) Докажите, что $\left[\sqrt{[x]}\right] = \left[\sqrt{x}\right]$ при всех $x \ge 0$.

б) При каких $a > 1$ равенство $\left[\log_a [x]\right] = \left[\log_a x\right]$ выполняется при всех $x > 0$?

15. Докажите, что $\left\{\left(5+\sqrt{26}\right)^n\right\} < \frac{1}{10^n}$ при любом натуральном n.

Целая часть и деление с остатком

Разделим с остатком натуральное число a на натуральное число b, т.е. запишем a в виде

$$a = kb + r,$$

где частное k – целое неотрицательное число, а остаток $0 \le r \le b-1$. Перепишем равенство так:

$$\frac{a}{b} = k + \frac{r}{b}.$$

По определению целой и дробной частей,

$$k = \left[\frac{a}{b}\right],\ \frac{r}{b} = \left\{\frac{a}{b}\right\},$$

так что

$$a = \left[\frac{a}{b}\right]b + b\left\{\frac{a}{b}\right\}.$$

Мы сумели выразить частное и остаток через целую и дробную части числа $\frac{a}{b}$.

А теперь давайте выясним, сколько существует натуральных чисел, меньших данного числа x (не обязательно целого) и делящихся на данное натуральное число n.

Ясно, что если $n > x$, то таких чисел нет. Если же $kn \le x < (k+1)n$, то это числа n, $2n$, …, kn. Их ровно k штук. А так как

$$k \le \frac{x}{n} < k+1,$$

то $k = \left[\frac{x}{n}\right]$.

Это простое замечание позволит нам получить одну важную для теории чисел формулу. Но сначала решим такую задачу.

Задача 7. *На какую степень двойки делится 100!?*

Решение. По доказанному ранее, среди чисел 1, 2, …, 100 имеется

$\frac{100}{2} = 50$ четных чисел,

$\frac{100}{4} = 25$ чисел, делящихся на 4,

$\left[\frac{100}{8}\right] = 12$ чисел, делящихся на 8,

$\left[\frac{100}{16}\right] = 6$ чисел, делящихся на 16,

$\left[\frac{100}{32}\right] = 3$ числа, делящихся на 32,

$\left[\frac{100}{64}\right] = 1$ число, делящееся на 64.

Отсюда следует, что всего в произведение 100! входит 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97 двоек, т.е. 100! делится на 2^{97} и не делится на 2^{98}.

Ответ. 97.

Аналогично, при любом n и простом p есть $\left[\frac{n}{p}\right]$ чисел, делящиеся на p, $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ – делящихся на p^2, $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ – делящихся на p^k. Если $p^m \le n < p^{m+1}$, то показатель степени, в которой число p входит в разложение $n!$ на простые множители, равен

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^m}\right].$$

Иногда прибегают к такой записи:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\ldots,$$

имея в виду, что в написанной сумме все слагаемые, начиная с некоторого места, равны нулю.

Упражнения

16. а) При каких натуральных n число $n!$ делится на 2^n?
б) Существует ли такое k, что $n!$ делится 2^{n-k} при всех n?
в) Пусть $p>2$ – простое число. Существует ли такое k, что $n!$ делится на p^{n-k} при всех n?

17. На какую степень двойки делится число $(n+1)(n+2)\ldots(2n)$?

18. Докажите, что $(n!)!$ делится на $(n!)^{(n-1)!}$.

19. На какую степень простого числа p делится число
а) $(2n)!!=2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)$; б) $(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$?

Подсчет количества целых точек

Начнем с совсем простого вопроса. Сколько целых чисел содержится в интервале $(\alpha;\beta)$? Ясно, что если целое число m удовлетворяет неравенствам $\alpha<m<\beta$, то $[\alpha]+1\le m<$ $<[\beta]$, но таких чисел имеется в точности $[\beta]-[\alpha]$. Это так же легко понять, как и то, что *между* 1 и 10 мая ровно 8 дней.

Аналогичный вопрос. Сколько чисел, кратных данному $x>0$ (т.е. чисел вида nx, где n – целое число), содержится в промежутке $(\alpha;\beta)$? Ответ очевиден – таких чисел ровно $\left[\frac{\beta}{x}\right]-\left[\frac{\alpha}{x}\right]$.

Теперь решим задачу.

Задача 8. *Докажите, что если $x>0$ и n натуральное, то*

$$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right].$$

Решение. Рассмотрим натуральные числа, меньшие x и делящиеся на n. Таких чисел ровно $\left[\frac{x}{n}\right]$. Но те же самые числа образуют множество чисел, не превосходящих $[x]$ и делящихся на n. Отсюда и следует доказываемое равенство.

Упражнение 20. Найдите количество натуральных чисел, меньших x и делящихся на 2 или на 3.

Следующая важная для теории чисел задача решается с помощью подсчета числа целых точек на плоскости.

Задача 9. *Пусть p и q — взаимно простые целые числа. Докажите, что*

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Решение. Рассмотрим на плоскости xOy точки $(x;y)$ с целыми координатами, такие, что $1\le x\le q-1$, $1\le y\le$ $\le p-1$, т.е. точки, лежащие *внутри* прямоугольника $OABC$ (рис.5). Всего имеется $(p-1)(q-1)$ таких точек. Заметим, что на диагонали OB этого прямоугольника нет точек с целыми координатами, кроме точек O и B. (В самом деле, прямая OB имеет уравнение $y=\frac{p}{q}x$. Если целая точка $(m;n)$ лежит на OB, причем $1<m<q$, то $\frac{n}{m}=\frac{p}{q}$, т.е. $qn=$ $=mp$. Но так как q и p взаимно просты, то n делится на p, а m делится на q, т.е. $m\ge q$, $n\ge p$. Противоречие.) Поэтому в треугольнике OBC содержится ровно половина рассматриваемых целых точек, т.е. $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$.

Подсчитаем теперь это же количество другим способом. При $x=k$ (k – натуральное число) на отрезке KL лежат $\left[\frac{p}{q}k\right]$ точек с целыми координатами. Таким образом, их общее количество равно сумме

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right],$$

что и доказывает равенство из условия задачи.

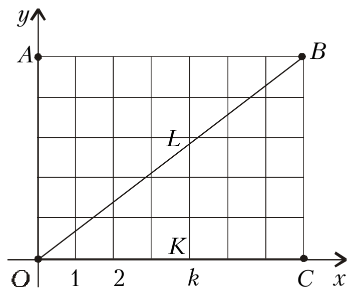

Рис. 5

Точно так же доказывается, что

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Разберем еще один пример. Обозначим через $\tau(n)$ количество делителей натурального числа n, и решим такую задачу.

Задача 10. *Докажите, что*

$$\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(n)=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right].$$

Решение. Количество чисел из множества 1, 2, ..., n, делящихся на некоторое число k, равно $\left[\frac{n}{k}\right]$ (это числа k, $2k$, ..., $\left[\frac{n}{k}\right]k$). Сумма $\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]$ равна количеству чисел, делящихся на 1, плюс количество чисел, делящихся на 2, ..., плюс количество чисел, делящихся на n. Но ведь это и есть сумма $\tau(1)+\tau(2)+\tau(3)+\ldots+\tau(n)$.

Этот результат тем более интересен, что количество делителей натурального n выражается через n весьма непросто. Пусть $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1,p_2,\ldots p_k$ – простые числа. Тогда $\tau(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$. Для доказательства достаточно заметить, что всякий делитель d числа n имеет разложение вида $d=p_1^{\beta_1}\ldots p_k^{\beta_k}$, где $0\le\beta_i\le\alpha_i$, $i=1, 2, \ldots, k$, т.е. однозначно определяется набором чисел $(\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_k)$. Но всего таких наборов существует $(\alpha_1+1,\alpha_2+1,\alpha_k+1)$.

Отметим еще одно полезное соотношение.

Задача 11. *Пусть $\sigma(n)$ – сумма всех делителей числа n. Тогда*

$$\sigma(1)+\sigma(2)+\ldots+\sigma(n)=\left[\frac{n}{1}\right]+2\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+n\left[\frac{n}{n}\right].$$

Решение. Число 1 – делитель всех чисел, поэтому $\left[\frac{n}{1}\right]=n$ – сумма всех единиц. На 2 делится $\left[\frac{n}{2}\right]$ чисел, так что $2\left[\frac{n}{2}\right]$ есть сумма всех двоек — делителей чисел от 1 до n. Вообще, $\left[\frac{n}{k}\right]$ — количество чисел, не больших n и делящихся на k. Поэтому $k\left[\frac{n}{k}\right]$ — это сумма всех делителей, равных k. Следовательно, сумма по k всех чисел вида $k\left[\frac{n}{k}\right]$ есть в точности левая часть доказываемого равенства.

Упражнение 21. Докажите, что

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$